

文章编号: 1002-1582(2025)06-0649-07

基于有限内存拟牛顿法的荧光显微成像 相位差异自适应光学技术研究

黄则陆, 李欣, 苏德磊, 于文浩, 张之光*

(江苏海洋大学 电子工程学院, 江苏 连云港 222005)

摘 要: 荧光显微镜因其对样品损伤小、可进行特异性标记等特点, 被广泛应用于细胞结构及动态过程的研究。然而当光的波前由于系统自身缺陷或样品的折射效应而发生畸变时, 这些光学像差的产生会大大降低成像的对比度和分辨率。自适应光学(AO)是一种校正波前畸变的技术, 将自适应光学技术与荧光显微镜相结合, 可以有效提高成像的质量。文章提出了一种基于有限内存拟牛顿法(L-BFGS)的荧光显微成像相位差异(PD)自适应光学技术, 相位差异自适应光学技术最初用于天文观测领域, 在生物样本显微成像方面的应用尚未得到充分探索。仿真与实测结果表明, 相比基于高斯牛顿法(Gauss-Newton)的荧光显微相位差异自适应光学技术, 方法在计算速度、波前重建能力方面都有着较大的优势。研究结果可为恢复生物细胞的衍射极限成像提供重要的理论基础。

关 键 词: 有限内存拟牛顿法; 高斯牛顿; 荧光显微镜; 相位差异法; 自适应光学

中图分类号: TP273.2

文献标识码: A

Research on phase diversity method based on L-BFGS for fluorescence microscopy in adaptive optics

HUANG Zelu, LI Xin, SU Delei, YU Wenhao, ZHANG Zhiguang*

(School of Electronic Engineering, Jiangsu Ocean University, Lianyungang 222005, China)

Abstract: Fluorescence microscopy is widely used in the study of cell structures and dynamic processes due to its minimal sample damage and ability to perform specific labeling. However, when the light wavefront is distorted due to system defects or refractive effects of the sample, these optical aberrations can significantly reduce imaging contrast and resolution. Adaptive optics (AO) is a technology used to correct wavefront distortions. By combining adaptive optics with fluorescence microscopy, imaging quality can be effectively improved. The fluorescence microscopy phase diversity (PD) adaptive optics technique based on the limited-memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (L-BFGS) method is proposed. Phase diversity adaptive optics was initially used in astronomical observations, and its application in biological sample microscopy has not been fully explored. Simulation and experimental results show that, compared to the fluorescence microscopy phase diversity adaptive optics technique based on the Gauss-Newton method, the proposed method offers significant advantages in computational speed and wavefront reconstruction capabilities. The research results provide an important theoretical foundation for restoring diffraction-limited imaging of biological cells.

Keywords: L-BFGS; gauss-newton; fluorescence microscopy; phase diversity; adaptive optics

收稿日期: 2025-04-07; 收到修改稿日期: 2025-08-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(U2141255)

作者简介: 黄则陆(2000—), 男, 硕士研究生, 从事自适应光学方面研究。huangzelu@jou.edu.cn

张之光(1988—), 男, 讲师, 博士, 从事自适应光学及其应用方面研究。

* 通讯作者: zhangzhiguang10@mails.ucas.ac.cn

0 引 言

荧光显微镜通过荧光探针对生物组织或细胞进行特异性标记,实现高分辨率成像并支持活体观察,已成为研究细胞结构与动力学过程的关键工具^[1]。然而,受光的波动特性影响,传统光学显微镜受到衍射极限的限制,同时像差的存在会进一步影响成像质量,使得分辨率难以达到衍射极限。自适应光学(Adaptive Optics, AO)技术最早由美国天文学家Babcock于1953年提出^[2],并成功应用于天文观测,实现了成像分辨率的显著提升。2000年,自适应光学技术首次应用于生物荧光显微镜上^[3],用于校正由生物组织折射率不均匀引起的像差,从而标志着自适应光学在生物显微成像领域应用正式开启。

实现自适应光学的关键在于波前探测和畸变校正,当前常用的方法可分为基于波前探测器的直接探测法和基于迭代算法的间接探测法^[4-6]。然而,直接检测生物样本的畸变波前往往会面临着诸多挑战。首先,夏克-哈特曼波前探测器(Shack-Hartmann Wavefront Sensor, SHWFS)在处理生物组织复杂的三维结构时容易受到离焦及杂散光的干扰;另一方面,生物荧光显微镜中荧光光子的数量有限,不足以同时满足波前检测与样本成像的需求^[7]。因此,基于迭代算法的无波前探测方法已成为研究热点。然而,该方法需经过多次迭代才能获得符合评价标准的像差信息,搜索过程耗时较长,且探测结果可能存在不唯一性^[1]。

在众多间接探测法中,相位差异法(Phase Diversity, PD)通常通过在离焦图像间引入已知的离焦像差来获取显微成像系统中未知的波前像差。该方法最初主要应用于天文领域,但基于相位差异的自适应光学技术应用于生物样本显微成像中却尚未得到充分挖掘。2013年,Kner等^[8]提出将相位差异法应用于三维物体的宽视野成像。2020年,Krishnan等^[9]提出了一个基于深度学习的宽视场光学像差和校正框架。结合相位差异自适应光学技术,通过两个模块分别进行波前相位估计和盲卷积,由此生成无像差图像。2023年,Hu等^[10]提出了一种基于物理的机器学习辅助的方法,结合引入预定义的相位偏置来获取一系列图像,通过补偿由不完美的光学系统和样本中不均匀的折射结构引起的像差。相位差异法利用显微镜中相干光瞳函数(Pupil Function, PF)与相干点扩散函数(Point Spread Function, PSF)之间的傅里叶变换关系,通过测量PSF来确定波前^[11]。其核心是通过优化算法求解评

价函数的全局最优值。常用的梯度优化算法如最速下降法、共轭梯度法和拟牛顿法已广泛应用于此领域。BFGS法是一种常用的拟牛顿方法,通过利用近似黑塞(Hessian)矩阵的方法来解决牛顿法对二阶导数的依赖,但其迭代过程需占用大量存储空间,矩阵的存储和计算会比较困难。为此,Liu和Nocedal等^[12]提出有限内存拟牛顿法(Limited-memory Broyden Fletcher Goldfarb Shanno, L-BFGS),仅需存储最近若干次迭代数据以降低存储需求。

2024年,Johnson等^[13]提出的基于高斯牛顿法(Gauss-Newton)的荧光显微成像相位差异自适应光学技术备受关注。该方法在无需额外硬件的情况下,以少量测量实现了小于 $\lambda/35$ 的均方根(RMS)误差,成功恢复生物样品的衍射极限成像。但在面对大规模数据及受较大扰动的初始畸变图像时,高斯牛顿法的劣势逐渐体现。因此,本文在此基础上提出了一种基于有限内存拟牛顿法的荧光显微相位差异自适应光学技术,该方法相比基于高斯牛顿法的相位差异自适应光学技术在处理较大像差的图像时的校正能力、校正速度方面都有较大的优势。

1 算法介绍

1.1 PD算法介绍

在荧光成像中,可以将图像 d 表示为目标 f 和点扩散函数 $s(\phi)$ 的卷积,之间的关系表示为

$$d = f \star s(\phi) + n \quad (1)$$

式中, $\star$ 表示卷积; ϕ 代表像差, n 为噪声,并假设 s 在空间上是恒定的。在自适应光学中,希望通过估计 ϕ 来补偿像差,从而提升图像的成像质量。通常, f 和 ϕ 都是未知的,因此无法仅从单一图像 d 中估计出其中的任何一个。因为不同的波前畸变可能产生相同的光强分布,从而导致解的不唯一性。相位差异法则是通过收集附加的差异图像 $\{d_1, \dots, d_k\}$ 来解决这一问题,其中的 $\theta_1, \dots, \theta_k$ 是人为引入的已知差异像差,这些图像中包含的附加信息可以帮助有效地估计目标 f 和像差 ϕ ,如图1所示(图中忽略了噪声的影响)。

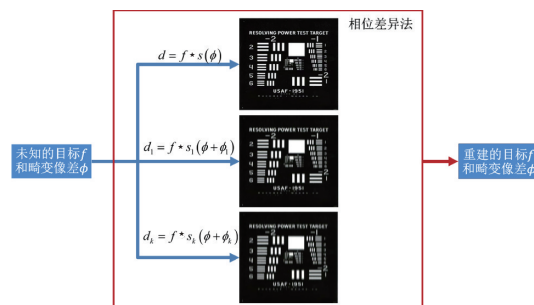


图1 相位差异法原理示意图

1.2 基于L-BFGS的荧光显微成像相位差异法

本文使用L-BFGS法来快速估计目标 f 和像差 ϕ 。其数学策略与Vogel等^[14]的方法密切相关,但在像差的参数化方面有所不同。Vogel的研究聚焦于天文学领域,他们研究的像差主要由大气的时间波动引起,并将其建模为一种二阶零均值的平稳过程。与此不同,在荧光显微镜系统中,Johnson等^[13]将像差表示为泽尼克多项式的展开形式,目标是来估计这些多项式的系数向量。由于使用有限数量的泽尼克多项式可以自然地生成较为平滑的相位图,因此省略了Vogel等针对相位所采用的正则化项,但保留了他们在估计目标时使用的Tikhonov正则化项。具体推导过程如下:

对于第 k 个相位差异图像 $d_k(x)$ 所获取数据的成像模型表示为

$$d_k(x) = s_k(x) \star f(x) + n(x) \quad (2)$$

式中, $\star$ 表示卷积, $f(x)$ 为未知的目标对象, $n(x)$ 为加性噪声。为了同时确定未知的目标 $f(x)$ 和像差 $\phi(u)$,将 $\phi(u)$ 表示为 N 阶泽尼克多项式的展开形式,其系数为 c_n

$$\phi(u) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(u) \quad (3)$$

因此,目标是确定一个 $N \times 1$ 的系数向量 c , $c = \{c_1, \dots, c_n\}$,从而来确定未知的相位 ϕ 和目标 $f(x)$ 。为了通过寻找系数向量 c 来确定 ϕ 和 $f(x)$,尝试最小化一个带有Tikhonov正则化的最小二乘目标函数

$$J = J[\phi, f] = \frac{\gamma}{2} \int_{R^2} f(x)^2 dx + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^K \int_{R^2} [(s_k \star f)(x) - d_k(x)]^2 dx \right) \quad (4)$$

Gonsalves研究表明^[7],在给定相位估计值和点扩散函数的条件下,目标 $f(x)$ 具有封闭形式的表达式,其中 γ 是正则化参数。根据Vogel^[14]文献中的公式,可表示为

$$F[\phi] = \frac{\sum_{k=1}^K S_k^*[\phi] D_k}{\gamma + \sum_{k=1}^K |S_k[\phi]|^2} \quad (5)$$

式中,上标 $*$ 表示复共轭; D_k 是相位差异图像 d_k 的傅里叶变换; $\mathcal{F}[\phi]$ 是 $f(x)$ 的傅里叶变换,并且

$$S_k[\phi] = \mathcal{F}\{s_k[\phi]\} \quad (6)$$

是PSF的傅里叶变换。为了简洁起见,可以省略对空间位置 x 和空间频率 u 的显式依赖,但保

留了对相位 ϕ 的显式依赖,这样就可以仅以未知的相位为变量

$$J = \sum_{k=1}^K |D_k|^2 - \frac{\sum_{k=1}^K |D_k^* S_k[\phi]|^2}{\sum_{k=1}^K |S_k[\phi]|^2} + \gamma \quad (7)$$

为了确定相位,Vogel等在相位反演问题中应用了L-BFGS方法,该方法为拟牛顿方法,拟牛顿法是一类不需要计算Hessian矩阵,而是通过产生一系列Hessian近似矩阵来进行优化的算法。其迭代公式为

$$c_{k+1} = c_k + \lambda_k d_k \quad (8)$$

$$d_k = -H_k g_k \quad (9)$$

$$H_{k+1} = \left(I - \frac{s_k y_k^T}{s_k^T y_k} \right) H_k \left(I - \frac{y_k s_k^T}{s_k^T y_k} \right) + \frac{s_k s_k^T}{s_k^T y_k} \quad (10)$$

式中 H_k 为逆Hessian的近似, $s_k = c_{k+1} - c_k$ 为步长变化量, $y_k = g_{k+1} - g_k$ 为梯度变化量。

令 $\rho_k = 1/s_k^T y_k$, $V_k = I - s_k^T y_k$,则逆Hessian近似的BFGS公式表示为

$$H_{k+1} = V_k^T H_k V_k + \rho_k s_k s_k^T \quad (11)$$

矩阵 H_k 是通过使用成对的 $\{s_k, y_k\}$ 来更新 H_k 得到的。在L-BFGS法中,通过存储 m 对 $\{s_i, y_i\}$ ($i = k-m, k-m+1, \dots, k-1$)来隐式地保存 H_k ,因此有限内存拟牛顿法对于解决大规模优化问题非常有用。

选择一些初始的逆Hessian矩阵来近似 H_0 ,并将其作为第 k 次迭代的起始值,然后可以通过重复使用下式 m 次来更新矩阵 H_{k+1} ,表示为

$$H_{k+1} = (V_k^T \cdots V_{k-m}^T) H_0 (V_{k-m} \cdots V_k) + \sum_{j=0}^{\hat{m}} \rho_{k-m+j} \left(\prod_{l=0}^{\hat{m}-j-1} V_{k+l}^T \right) s_{k-m+j} s_{k-m+j}^T \left(\prod_{l=0}^{\hat{m}-j-1} V_{k+l} \right) \quad (12)$$

式中, $\hat{m}$ 表示在每次迭代中至多使用的 $\{s_k, y_k\}$ 的对数; V_k^T 为 V_k 的转置。其次,选取初始 H_0 很重要,在实践中被证明有效^[15]的是

$$H_0 = \frac{s_k^T y_k}{\|y_k\|^2} I \quad (13)$$

接下来还需要构造梯度,Vogel等给出了梯度的表达式为

$$g[\phi] = -2 \sum_{k=1}^K \text{Imag} \left(H_k^*[\phi] \mathcal{F} \left(\text{Real} \left(h_k[\phi] \mathcal{F}^{-1} V_k[\phi] \right) \right) \right) \quad (14)$$

在上述内容中, $\text{Imag}\{\cdot\}$ 表示复随机变量 w 的

虚部, $\text{Real}\{\cdot\}$ 表示实部, $\mathcal{F}$ 表示傅里叶变换, 而 $\mathcal{F}^{-1}$ 表示傅里叶变换的逆变换。此外,

$$V_k[\phi] = F^*[\phi] D_k - |F[\phi]|^2 S_k[\phi] \quad (15)$$

由于梯度的维度与图像中的像素数量相同, 为了获得关于系数向量 c 的梯度, 只需要将上述梯度与泽尼克多项式 ϕ_m 进行内积运算

$$g_m = \langle g[\phi], \phi_m \rangle, m = 1, \dots, M \quad (16)$$

通过比较目标函数 J 在当前迭代与上一迭代之间的变化量, 与自算法开始迭代至当前时刻的总变化量之比来评估算法的收敛性。若迭代后 J 的值小于设定的阈值, 即可判定算法收敛并终止迭代。可表示为

$$\Delta J = \frac{|J^{(q+1)} - J^{(q)}|}{|J^{(0)} - J^{(q)}|} \quad (17)$$

使用 L-BFGS 算法迭代估计目标 f 和相位 ϕ 的过程如图 2 所示。首先, 根据输入的相位差异信息, 初始化波前为 0, 随后计算当前波前的光瞳函数和调制传递函数 MTF (Modulation Transfer Function, MTF)。基于得到的 PF 和 MTF 计算目标函数 J , 并判断是否满足收敛条件。如果满足收敛条件, 则输出最终的目标 f 和相位估计值 ϕ ; 否则, 继续计算梯度 g 和 Hessian 矩阵, 以优化估计过程。然后, 根据梯度 g 和 Hessian 矩阵更新 Zernike 系数, 用于重新估计波前。此过程不断循环, 直到目标函数的变化量小于设定阈值 (如 0.01), 此时算法收敛, 输出最终估计结果。

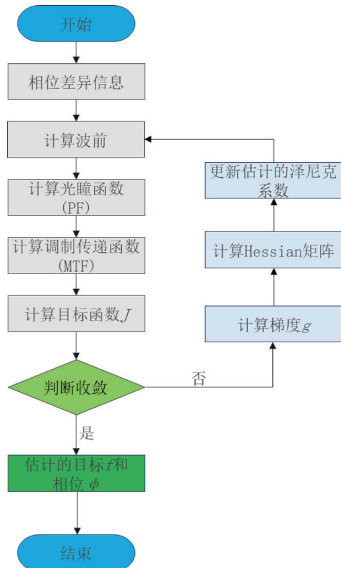


图 2 L-BFGS 法估计目标 f 和 ϕ 相位流程图

2 系统介绍

为了验证本文提出的基于有限内存拟牛顿法的荧光显微成像相位差异自适应光学技术, 本文

模拟搭建了荧光显微镜光学系统, 如图 3 所示, 荧光激发模块 LA 产生的 405nm 激光光束从二向色镜 (Dichroic Mirror, DC) 处反射并聚焦在透镜 L1 的后焦平面上, 并经反射镜 M (Mirror) 引导进入物镜 (Objective Lens, OBJ) 的后焦面, 从而照亮了荧光标记的样品。样品中的荧光分子吸收激发光后, 发射出荧光信号。这些荧光信号沿原光路反射至物镜, 经反射镜 M 和透 L1 再次传至二向色镜, 从而实现激发光与荧光信号的有效分离。然后荧光信号透过 L2 至变形镜 (Deformable Mirror, DM) 上经由透镜 L3 将荧光成像到 CCD 上, 传入 PC 端, 利用基于有限内存拟牛顿法的荧光显微相位差异法计算出驱动电压来控制 DM 形成校正闭环。

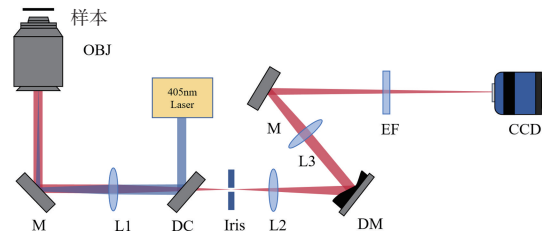


图 3 荧光显微镜结构示意图

本文采用的是 97 单元的变形镜, 由 L1 和 L2 透镜以 4f 配置放大 (为了更直观的表达结构, 此图并不是按比例绘制的), 用于将物镜瞳孔放大并成像到变形镜上, 且在 L1 和 L2 之间设置了光阑 (Iris), 用于选择透过特定孔径的光束。

3 实验结果与分析

3.1 仿真分析

为了测试本文提出的基于有限内存拟牛顿的荧光显微相位差异自适应光学技术的波前重建效果, 选取了 256×256 尺寸大小的 USAF 标靶作为成像目标模拟成像。仿真中涉及到的部分器件参数如下: 激光器发射的中心波长 λ 为 670nm, 使用 1.2NA、60x 的物镜。两种方法的波前重建效果如图 4 和 5 所示。

针对输入的同尺寸 USAF 标靶图像, 如图 4 (a)、(b) 和图 5 (a)、(b) 所示, 分别为有限内存拟牛顿法 (L-BFGS 法) 和高斯牛顿法 (Gauss-Newton 法) 重建前后的图像。为了量化两种算法的性能差距, 将输入的 USAF 标靶图像生成对应的波前图, 并计算其 PV 值, 如图 4 (c)、(d) 和图 5 (c)、(d) 所示, L-BFGS 法和 Gauss-Newton 法重建波前的 PV 值分别为 2.0678 λ 、2.3973 λ 。L-BFGS 法的波前重建能力优势明显, 更接近于原图的 PV 值 1.8643 λ 。

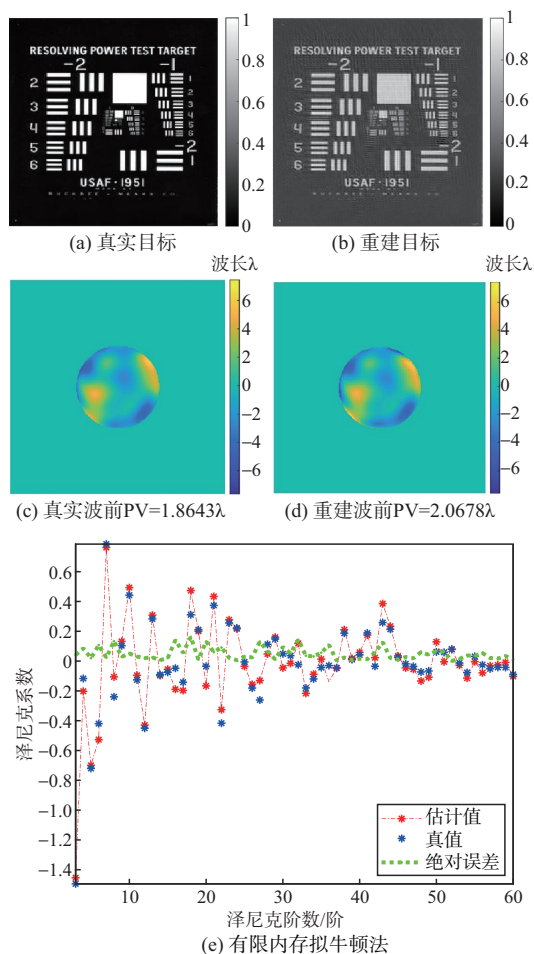


图4 有限内存拟牛顿法的波前重建效果

仿真采用前60阶泽尼克系数来表述波前(排除tip/tilt项),两种方法重建的Zernike系数如图4(e)和图5(e)所示,L-BFGS法与Gauss-Newton法估计的泽尼克系数值与真值的绝对误差分别为 0.10λ 、 0.16λ ,代表了其更优越的波前重建能力。

3.2 实验验证

为了更好地模拟像差对生物细胞显微成像的效果,在Johnson等^[13]提供的开源数据集基础上,通过Matlab编程语言平台,建立了具有缩放因子的人骨肉瘤细胞(U2OS cell)数据集,在模拟成像过程时,还加入了混合泊松和高斯噪声用来模拟真实图像。Zernike系数是逐阶随机生成的,且tip、tilt、阶数大于20的被排除在选择之外。Zernike系数 W_c 通过随机生成的 W_n (为0~1之间的随机数)确定,并乘以缩放因子 Q 用来控制像差的大小。

$$W_c = Q(2W_n - 1) \quad (18)$$

RMSE指的是算法重建估计的Zernike系数与初始Zernike系数之间的误差的均方根。wRMSE指的是评估波前重建质量的指标,其值反映了波前误差在有效光瞳区域内的均方根值。Runtime指的是处理100组随机畸变图像共花费的总时间(每

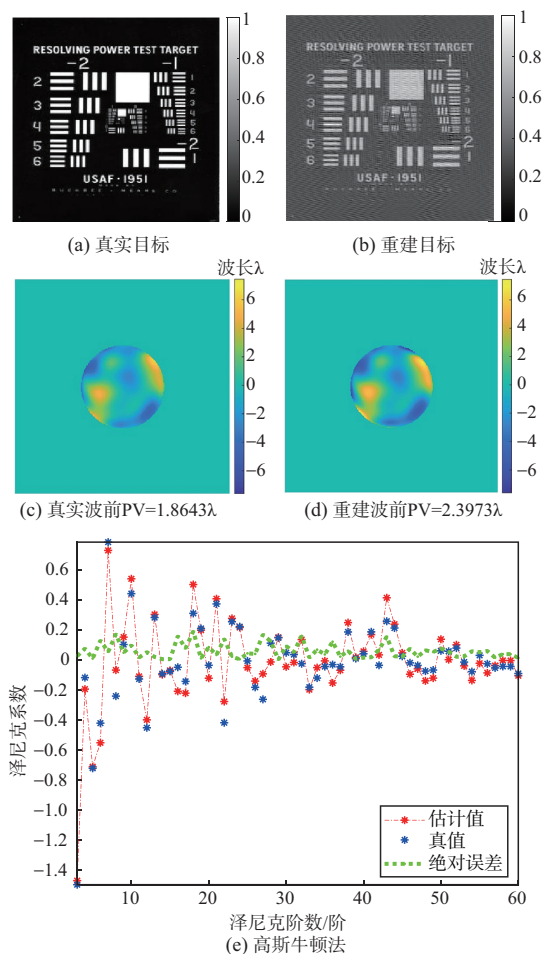


图5 高斯牛顿法的波前重建效果

组包含1个初始畸变图像和4个相位差异图像)。PV值是指表示波前中峰值(Peak)和谷值(Valley)之差,反映了波前的平整度及均匀性。

为了对比两种算法的性能,本文使用的100组随机图像是通过以迭代次数的索引作为种子生成的。如图6(a)和(b)为Courtney Johnson等^[13]给定的一组U2OS cell的相位差异图像,左边一列为初始畸变图像,右边一列分别为L-BFGS法和Gauss-Newton法校正后的像差(每组图像包含1个初始畸变图像和4个相位差异图像,初始畸变的wRMSE约为150nm)。结合计算时间以及性能指标wRMSE(量化重建波前的误差)可以发现,迭代结束后两种算法可以达到几乎相同的RMSE(法一L-BFGS为55.1nm法二Gauss-Newton为58.8nm),但L-BFGS法计算用时约为Gauss-Newton法的1/2。

在已建立具有缩放因子的U2OS生物细胞数据集上对两种算法性能进行进一步测试,表2-3、表分别对应于 $Q=1$ (弱像差)、2.5(中等像差)、5(强像差)时的性能指标两种算法处理100组随机畸变图像的表现。

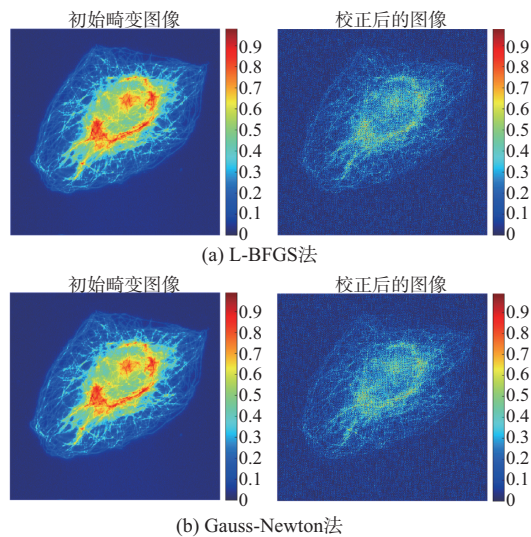


图 6 荧光显微成像中 U2OS 生物细胞校正图

从表 1~3 可知，随着像差的增大，两种算法估计的 RMSE、wRMSE、以及运行的总时间 Runtime 均有所明显增加。在 $Q=1$ （弱像差）时，两者的 RMSE 和 wRMSE 差别并不大，Gauss-Newton 法的 wRMSE 小幅优于 L-BFGS 法，但这时 L-BFGS 法对于大量数据的优越性已经体现出来，其计算时间约为 Gauss-Newton 法的 1/3 就可以达到几乎相同的效果。在 $Q=2.5$ （中等像差）时，两者校正能力的差距逐渐体现，L-BFGS 法对应的 RMSE 和 wRMSE 要全面由于 Gauss-Newton 法，在 $Q=5$ （强像差）时这种差距逐渐被放大。

表 1 $Q=1$ (弱像差)

迭代算法	RMSE λ/nm	wRMSE λ/nm	Runtime t/s
有限内存拟牛顿法	26.7	59.7	603
高斯牛顿法	30.2	58.7	1845

表 2 $Q=2.5$ (中等像差)

迭代算法	RMSE λ/nm	wRMSE λ/nm	Runtime t/s
有限内存拟牛顿法	37.9	66.8	770
高斯牛顿法	55.8	89.4	2506

表 3 $Q=5$ (强像差)

迭代算法	RMSE λ/nm	wRMSE λ/nm	Runtime t/s
有限内存拟牛顿法	67.7	107.7	907
高斯牛顿法	125.8	190.7	3700

为了更直观地比较两种算法的性能，绘制了箱型图。横坐标分别为法一（L-BFGS 法）和法二（Gauss-Newton 法），纵坐标为估计的 Zernike 系数的残差均方根（Residual RMSE）。箱型图 7、8、9 分别对应 $Q=1$ 、 $Q=2.5$ 和 $Q=5$ 的情形。从图中可以看出，无论在何种像差下，L-BFGS 法的校正

能力明显优于高斯牛顿法，且这种优势随着 Q 值的增大而提高。然而，也发现 L-BFGS 法的鲁棒性相对较差，箱型图中的最大值上方存在迭代的离群值。在 $Q=2.5$ 和 $Q=5$ 时，L-BFGS 法均出现了离群值，而高斯牛顿法仅在 $Q=2.5$ 时出现了一次离群值。针对 L-BFGS 法在中等及强像差（ $Q=2.5$ 、5）时出现的离群值问题，下一步的工作是引入更加稳健的迭代控制策略，以减少异常离群值的产生。

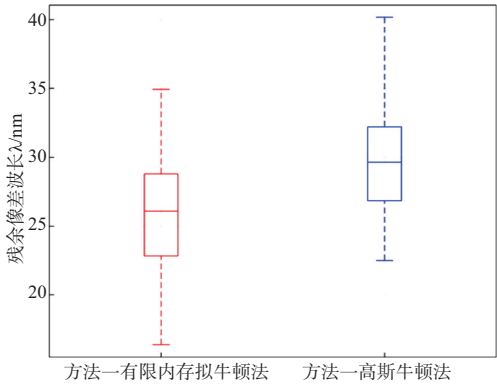


图 7 弱像差($Q=1$)时残余像差 RMSE 的结果图

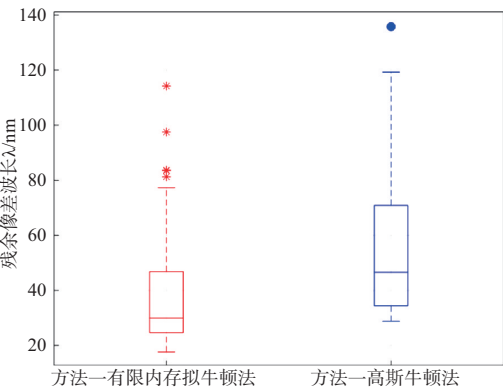


图 8 中等像差($Q=2.5$)时残余像差 RMSE 的结果图

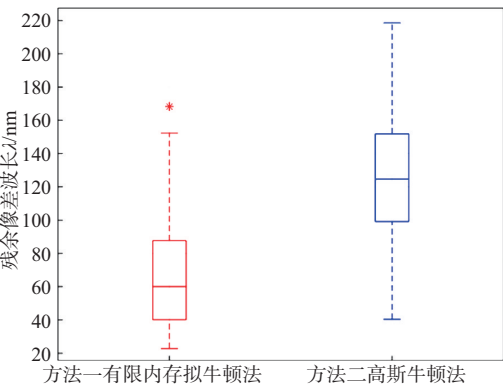


图 9 强像差($Q=5$)时残余像差 RMSE 的结果图

4 总 结

本文提出了一种基于有限内存拟牛顿法的荧光显微成像相位差异自适应光学技术，有效提高了对于大规模数据以及强像差初始畸变图像波前重建的能力。仿真与实测结果表明，与传统的高

斯牛顿法相比,有限内存拟牛顿法虽然在鲁棒性上略显不足,但在校正速度和校正能力方面表现出明显优势。尤其是在较大像差下,有限内存拟牛顿法不仅校正精度更高,而且计算时间显著缩短;并且随着像差强度的增加,其优势愈加明显。由此可见,此方法不仅能够减少计算时间,还可显著提升校正精度,并且在强像差环境下优势更为突出。本方法为恢复生物细胞的衍射极限成像提供了重要理论基础。

参考文献:

- [1] 刘立新,张美玲,吴兆青,等. 自适应光学在荧光显微镜中的应用[J]. 激光与光电子学进展,2020,57(12):9—22.
Liu Lixin, Zhang Meiling, Wu Zhaoqing, et al. Application of adaptive optics in fluorescence microscopy[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2020, 57(12):9—22.
- [2] Babcock H W. The possibility of compensating astronomical seeing[J]. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 1953, 65(386):229—236.
- [3] Albert O, Sherman L, Mourou G, et al. Smart microscope: an adaptive optics learning system for aberration correction in multiphoton confocal microscopy[J]. Optics letters, 2000, 25(1):52—54.
- [4] Zhao L, Bai J, Hao Y, et al. Modal-based nonlinear optimization algorithm for wavefront measurement with under-sampled data[J]. Optics Letters, 2020, 45(19):5456—5459.
- [5] Zhao L, Yan H, Bai J, et al. Simultaneous reconstruction of phase and amplitude for wavefront measurements based on nonlinear optimization algorithms[J]. Optics Express, 2020, 28(13):19726—19739.
- [6] van Kooten M A M, Ragland S, Jensen-Clem R, et al. On-sky reconstruction of Keck primary mirror piston offsets using a Zernike wavefront sensor[J]. The Astrophysical Journal, 2022, 932(2):109.
- [7] Gonsalves R A. Phase retrieval and diversity in adaptive optics[J]. Optical Engineering, 1982, 21(5):829—832.
- [8] Kner P. Phase diversity for three-dimensional imaging[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2013, 30(10):1980—1987.
- [9] Krishnan A P, Belthangady C, Nyby C, et al. Optical aberration correction via phase diversity and deep learning[J]. BioRxiv, 2020, 04:026567.
- [10] Hu Q, Hailstone M, Wang J, et al. Universal adaptive optics for microscopy through embedded neural network control[J]. Light: Science & Applications, 2023, 12(1):270.
- [11] 王韵澎, 燕静, 郝翔. 自适应光学在超分辨显微成像技术中的应用(内封面文章·特邀)[J]. 红外与激光工程, 2024, 53(05):19—33.
Wang Yunpeng, Yan Jing, Hao Xiang. Application of adaptive optics in super-resolution microscopy (Inside cover article·Invited)[J]. Infrared and Laser Engineering, 2024, 53(05):19—33.
- [12] Liu D C, Nocedal J. On the limited memory BFGS method for large scale optimization[J]. Mathematical Programming, 1989, 45(1):503—528.
- [13] Johnson C, Guo M, Schneider M C, et al. Phase-diversity-based wavefront sensing for fluorescence microscopy[J]. Optica, 2024, 11(6):806—820.
- [14] Vogel C R. A limited memory BFGS method for an inverse problem in atmospheric imaging[C]//Methods and Applications of Inversion. Berlin, Heidelberg:Springer, 2005:292—304.
- [15] Li F, Rao C. Algorithms for phase diversity wavefront sensing [C]//Advanced Sensor Systems and Applications IV. SPIE, 2010, 7853:478—486.